

Epreuve de MathématiquesClasses : 1^{ères} F et T_{1/1}

Durée : 4H

Coeff. : 4

Exercice I (06,5pts)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3\text{cm}$ et m un paramètre réel. On considère le système de points pondérés suivants : $S = \{(A; -1 + m); (B; \frac{1}{2}m + 1); (C; 12m + 1)\}$

1. Pour quelles valeurs de m le système S admet-il un barycentre ? **(0,5pt)**
2. On suppose dans la suite que $m = 2$ et on désigne par G le barycentre des points pondérés $(A; 1); (B; 1); (C; 2)$ et C' le milieu de $[AB]$.
 - a. Démontrer que G est le milieu de $[CC']$ et faire une figure en plaçant les points $A; B; C; C'$ et G . **(0,25ptx6 = 1,5pt)**
 - b. Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. **(0,25pt)**
 - c. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ (on pourra exprimer les vecteurs \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} et \overrightarrow{CB} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}). **(0,25ptx2 = 0,5pt)**
 - d. Ecrire les vecteurs \overrightarrow{GA} , \overrightarrow{GB} et \overrightarrow{GC} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . **(0,25ptx3 = 0,75pt)**
 - e. En déduire les valeurs de : GA^2 ; GB^2 et GC^2 . **(0,25ptx3 = 0,75pt)**
3. On considère maintenant l'application $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \rightarrow MA^2 + MB^2 + 2MC^2$$
 - a. Calculer $f(A)$; $f(B)$; $f(C)$ et $f(G)$. **(0,25ptx4 = 1pt)**
 - b. Montrer que pour tout point M du plan $f(M) = 4MG^2 + f(G)$. **(0,25pt)**
 - c. Déduire suivant les valeurs du paramètre réel k , la ligne de niveau k de f . **(0,5pt)**
 - d. Déterminer et construire la ligne de niveau 41 de f . **(0,25ptx2 = 0,5pt)**

Exercice II (06pts)

Soit l'équation $(E): x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

1. Justifier que 1 est une solution de (E) . **(0,5pt)**
2. Déterminer deux réels a et b pour que (E) soit équivalente à l'équation : $(x - 1)(x^2 + ax + b) = 0$. **(1pt)**
3. En déduire les solutions de (E) . **(0,5pt)**
4. Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :
 - a. $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 = 0$ **(1pt)**
 - b. $(x + \frac{1}{x})^3 - 6(x + \frac{1}{x})^2 + 11(x + \frac{1}{x}) - 6 = 0$ **(1pt)**
 - c. $x\sqrt{x} - 6x + 11\sqrt{x} - 6 = 0$ **(1pt)**
 - d. $(x^2 - 2x)^3 - 6(x^2 - 2x)^2 + 11(x^2 - 2x) - 6 = 0$ **(1pt)**

Exercice III (04,5pts)

Dans l'équation $(E_m): x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 5 = 0$, m désigne un paramètre réel.

1. Quel est le degré de (E_m) ? Justifier la réponse. **(0,5pt)**
2. a. Pour quelles valeurs de m le nombre 2 est-il une solution de (E_m) ? **(0,5pt)**
b. Pour chaque valeur de m trouvée préciser l'autre solution de (E_m) . **(0,5pt)**
3. Pour quelles valeurs de m , (E_m) admet-elle deux solutions distinctes ? **(1pt)**
4. On appelle x' et x'' les solutions de (E_m) lorsqu'elles existent.
 - a. Déterminer m pour que $x'^2 + x''^2 = 53$ **(0,5pt)**
 - b. Déterminer m pour que $|x' - x''| = 13$ **(0,5pt)**
 - c. Etudier suivant les valeurs de m , le signe de x' et x'' . **(1pt)**

Exercice IV (03pts)

Déterminer pour chacune des fonctions ci-après, l'ensemble de définition que l'on présentera sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles :

1. $f(x) = \frac{3x^2+3x-5}{x^2-x-6}$ **(1pt)**
2. $g(x) = \sqrt{3x-4} - \sqrt{x+2}$ **(1pt)**
3. $h(x) = \frac{x^2+1}{2x-1-\sqrt{x^2+x}}$ **(1pt)**

