

FONCTIONS RATIONNELLES

1 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle p définie, dans chacun des cas suivants,

$$1. p(x) = \frac{3x+2}{x+3}$$

$$2. p(x) = \frac{4x-5}{x}$$

$$3. p(x) = \frac{x^2+5}{(x+4)(-2x+5)}$$

$$4. p(x) = \frac{x(x+9)}{x^2-64}$$

$$5. p(x) = \frac{2x+15}{x^2-2x+1}$$

$$6. p(x) = \frac{10x}{x^2+3}$$

$$7. p(x) = \frac{(x+4)(2x-9)}{3x^2(x-\sqrt{2})}$$

$$8. p(x) = \frac{4x^2}{(x^2+4)^2}$$

2 - On considère la fonction rationnelle f définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3x+5}{5x(3x+1)} \end{aligned}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f .

b) Calculer, si elles existent, les images par f des réels 5 ; 0 ; $+\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.

3 - Dans chacun des cas suivants, on considère une fonction rationnelle q .

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction q .

b) Simplifier $q(x)$ dans l'ensemble D (justifier cette simplification).

$$1. q(x) = \frac{15x^3-25x^2}{5x^2+10x}$$

$$2. q(x) = \frac{2x-2}{3x^2-6x+3}$$

$$3. q(x) = \frac{3x^2(x^2-49)}{x^3-14x^2+49x}$$

$$4. q(x) = \frac{(9x^2-4)(2x+7)}{(4x+7)(3x+2)}$$

$$5. q(x) = \frac{x\sqrt{3}-1}{6x^3-2x}$$

$$6. q(x) = \frac{-20x^2-60x-45}{(2x+3)(4x-5)}$$

$$7. q(x) = \frac{4-20x+25x^2}{25x^2-4}$$

$$8. q(x) = \frac{x^2-0,16+8,6(x-0,4)}{x(x^2-81)}$$

4 - On considère la fonction rationnelle g définie par :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{(3x+7)^2-(5x-1)^2}{2(x-4)(-5x+1)} \end{aligned}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction g et simplifier l'écriture de $g(x)$ dans l'ensemble D .

b) Calculer, si elles existent, les images par g des -2 ; $\frac{1}{5}$; $0,3$; 4 ; $\sqrt{7}$.

$$5. p(x) = \frac{9x^2 - 1}{9x^2 + 6x + 1}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{2x}{6x^2 + 2x}$$

9 - Dans chacun des cas suivants on considère une fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f .

b) Calculer $f(x)$ et simplifier $f(x)$ dans l'ensemble D , si cela est possible.

$$1. f: x \mapsto \frac{4}{x(x-2)} - \frac{x}{x-2} + 2$$

$$2. f: x \mapsto \frac{x+12}{(x+5)^2-1} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+4}$$

$$3. f: x \mapsto \frac{5}{4(x-1)} + \frac{4}{5(-x+1)} + \frac{9x+21}{20(1-x^2)}$$

$$4. f: x \mapsto \frac{-14x}{49x^2-4} - \frac{14x-4}{49x^2-28x+4} + \frac{x}{7x^2+2x}$$

10 - Dans chacun des cas, suivants, on considère deux fonctions rationnelles p et p' et on pose $f = pp'$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f .

b) Calculer $f(x)$ et simplifier $f(x)$ dans l'ensemble D , si cela est possible.

$$1. p(x) = \frac{2}{3x^2}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{6x}{x+6}$$

$$2. p(x) = \frac{3x+10}{1,5x-1}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{2,25x^2-1}{(3x+10)^2}$$

$$3. p(x) = \frac{x^2+7}{4x^2+1}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{20x}{(7+x)(4x-3)}$$

$$4. p(x) = \frac{5x+5x^2}{25x^2+60x+36}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{25x^2-36}{x^3+x^2}$$

$$5. p(x) = \frac{x^4-16}{4x^2+12x+9}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{8x^2-18}{(5x^2+20)(x-2)}$$

$$6. p(x) = \frac{x^2+5}{x^2-5}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{3x}{2x+3}$$

11 - Dans chacun des cas suivants on considère deux fonctions rationnelles p et p' et on pose $q = \frac{p}{p'}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction q .

b) Calculer $q(x)$ et simplifier $q(x)$ dans l'ensemble D , si cela est possible.

$$1. p(x) = \frac{x^2-64}{15x^2}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{40-5x}{x^2+64}$$

$$2. p(x) = \frac{x+10}{x-10}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{x^2+10}{x^2+20x}$$

$$3. p(x) = \frac{x^2-1,96}{(2x-1)^2}$$

$$\text{et } p'(x) = \frac{1,4-x}{1-2x}$$

5 - Soit la fonction k définie par :

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x^2 - 4x + 4}{|x - 2|}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction k .

b) Pour quels réels x a-t-on l'égalité,

$$k(x) = |x - 2|?$$

6 - Soit la fonction rationnelle h définie par :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{(x-2)x + x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

a) Quel est son ensemble de définition D ?

b) Simplifier l'écriture de $h(x)$ dans l'ensemble D .

c) Calculer $h(1 + \sqrt{3})$ et rendre rationnel le dénominateur de ce quotient.
Sachant que : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, donner un encadrement de $h(1 + \sqrt{3})$ d'amplitude 10^{-2} .

7 - Dans chacun des cas suivants on considère deux fonctions rationnelles p et p' et on pose : $s = p + p'$.

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction s puis simplifier, $s(x)$ dans l'ensemble D , si cela est possible.

1. $p(x) = \frac{3x + 19}{x + 5}$ et $p'(x) = \frac{2x + 6}{x + 5}$

2. $p(x) = \frac{x}{x + 2}$ et $p'(x) = \frac{4 - x}{x + 1}$

3. $p(x) = \frac{2x + 1}{x(x + 1)}$ et $p'(x) = \frac{1 - 2x}{x(x - 1)}$

4. $p(x) = \frac{x + 1}{x + 3}$ et $p'(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$

5. $p(x) = \frac{3x^2 + x}{2x(x + 1)}$ et $p'(x) = \frac{-3x + 2}{2x - 4}$

8 - Dans chacun des cas suivants on considère deux fonctions rationnelles p et p' et on pose $d = p - p'$.

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction d puis simplifier $d(x)$ dans l'ensemble D , si cela est possible.

1. $p(x) = \frac{x - 21}{2x + 7}$ et $p'(x) = \frac{3x - 14}{2x + 7}$

2. $p(x) = \frac{2x + 1}{x - \sqrt{2}}$ et $p'(x) = \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 - 2}$

3. $p(x) = \frac{4x - 16}{x^2 - 16}$ et $p'(x) = \frac{2x + 8}{x^2 + 8x + 16}$

4. $p(x) = \frac{3}{x(x + 1)(x - 2)}$ et $p'(x) = \frac{1}{x^2(x + 1)}$

$$\begin{array}{ll}
 4. \quad p(x) = \frac{4x^2}{x^2-16} & \text{et } p'(x) = \frac{x+4}{x-4} \\
 5. \quad p(x) = \frac{8x^2-50}{(5x^2+45)(x-3)} & \text{et } p'(x) = \frac{4x^2+20x+25}{x^4-81} \\
 6. \quad p(x) = \frac{9x^2-10x-4}{9x(x-1)} & \text{et } p'(x) = \frac{x+2}{3x-2}
 \end{array}$$

12 - 1. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = (5-3x)^2 - (3x-5)(2x+1) - (25-9x^2).$$

- Écrire $f(x)$ sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.
- Écrire $f(x)$ sous la forme d'un produit dont les facteurs sont des polynômes du premier degré.

2. Soit la fonction rationnelle h définie dans \mathbb{R} par :

$$h(x) = \frac{12x^2-23x+5}{(5-3x)(x-4)}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction h puis simplifier l'écriture de $h(x)$ dans l'ensemble D .
- Résoudre, dans D , les équations :

$$h(x) = 0 \quad h(x) = 1 \quad h(x) = \frac{17}{7}.$$

13 - 1. Soit g l'application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$g(x) = (7-2x)(x+5) - (21-6x)(2x-1)$$

- Développer $g(x)$ et l'écrire sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.
- Écrire $g(x)$ sous la forme d'un produit dont les facteurs sont des polynômes du premier degré.

2. On considère les fonctions rationnelles q et q' définies par :

$$q(x) = \frac{4x^2-49}{g(x)} \quad \text{et} \quad q'(x) = \frac{2x+7}{5x-8}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction q .
- Sur quelle partie A de \mathbb{R} a-t-on l'égalité $q(x) = q'(x)$?
- Résoudre, dans l'ensemble A , les équations :

$$q'(x) = 0 \quad q'(x) = 1 \quad q'(x) = \frac{2}{5} \quad q'(x) = -\frac{7}{8}.$$

14 - On considère les fonctions polynômes f et g , définies par :

$$f(x) = (3x+2)^2 - 9(x-2)^2$$

$$g(x) = (9x^2-12x+4) - (3x-2)(5x-3)$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

2. Mettre $g(x)$ sous la forme d'un produit dont les facteurs sont des polynômes du premier degré.

Calculer $g\left(-\frac{1}{3}\right)$; $g(2)$.

3. Soit h la fonction rationnelle définie par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

et k la fonction rationnelle définie par :

$$k(x) = \frac{16}{1-2x}$$

a) Les fonctions h et k ont-elles le même ensemble de définition? On précisera dans chaque cas cet ensemble. Les deux fonctions sont-elles égales?

b) Calculer $k(\sqrt{2})$. Le résultat sera donné par un quotient de dénominateur entier.

4. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation :

$$|f(x)| = 16 \quad (|a| \text{ désigne la valeur absolue du réel } a).$$

(D'après B.E.P.C., Paris 1976.)

15 - Soit f, g et h les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$f(x) = 3x - 1; \quad g(x) = -x + 3; \quad h(x) = x^2 - 9 + (x-3)(x+5)$$

1. Développer, réduire et ordonner $h(x)$ suivant les puissances décroissantes de x . Factoriser $h(x)$.

2. Calculer $h(-3)$; $h\left(\frac{3}{4}\right)$; $h(1-\sqrt{2})$.

3. Déterminer l'ensemble A des réels a tels que $f(a) < a$.
Déterminer l'ensemble B des réels b tels que $g(b) \leq f(b)$.

4. Soit r la fonction rationnelle définie par $r(x) = \frac{(f \times g)(x)}{h(x)}$.
Donner le domaine de définition de r et simplifier $r(x)$.

5. Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations :

$$r(x) = 0; \quad r(x) = -3; \quad r(x) = -\frac{4}{7}$$

(B.E.P.C. Sénégal, Session de 1976.)