

INEGALITE TRIANGULAIRE

1 - On donne un triangle isocèle (A, B, C) tel que $AB = AC$.
On désigne par (BH) et (CK) les hauteurs de ce triangle passant par B et de C .

$$(H \in (AC), \quad K \in (AB)).$$

1. En utilisant la symétrie par rapport à la médiatrice de (B, C) , démontrer que :

$$\widehat{HBC} = \widehat{KCB} \quad \text{et} \quad \widehat{HBA} = \widehat{KCA}.$$

2. Soit $\{I\} = (BH) \cap (CK)$. Démontrer que $IH = IK$.

3. Démontrer que (A, K, H) est un triangle isocèle.

2 - On donne un triangle isocèle (A, B, C) ($AB = AC$).

On désigne par (BM') et (CN') les médianes de ce triangle passant par B et C .

$$(M' \in (AC) \quad \text{et} \quad N' \in (AB)).$$

Démontrer que $\widehat{M'BC} = \widehat{N'CB}$ et $\widehat{M'BA} = \widehat{N'CA}$.

3 - On donne un triangle isocèle (A, B, C) ($AB = AC$).

On désigne par (BB') et (CC') les bissectrices des couples de demi-droites :

$$([BA), [BC)) \text{ et } ([CA), [CB)) \quad (B' \in (AC), C' \in (AB)).$$

1. Démontrer que le point d'intersection I des droites (BB') et (CC') est équidistant des droites (AB) , (BC) , (CA) .

2. En déduire que la droite (AI) est la médiatrice de (B, C) .

3. Démontrer que $\widehat{BCI} = \widehat{CBI}$ et $\widehat{IBA} = \widehat{ICA}$.

4 - (A, B, C, D) est un parallélogramme de centre O . On appelle E l'image de B par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (DC) .

1. Démontrer que le triangle (A, B, D) a pour image (C, E, D) par une isométrie composée d'une symétrie centrale et d'une symétrie orthogonale qu'on précisera.

2. Démontrer que : $\widehat{CDE} = \widehat{ABD}$ et $\widehat{ADB} = \widehat{DEC}$.

5 - (M, N, P, Q) est un parallélogramme. On appelle H et K les projections orthogonales de M et de N sur la droite (PQ) .

1. Construire le symétrique S de N par rapport à la droite (PQ) .

2. Démontrer que le triangle (M, Q, H) a pour image (S, P, K) dans une isométrie composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale qu'on précisera.

3. En déduire que $PS = QM$, $PK = QH$, $\widehat{KPS} = \widehat{HQM}$ et $\widehat{KSP} = \widehat{QMH}$.

6 - On donne un carré (A, B, C, D) de centre O et on désigne par I, J, K, L les milieux respectifs de (A, B) , (B, C) , (C, D) , (D, A) .

1. Démontrer que les triangles (A, B, L) et (C, D, J) sont isométriques.

En déduire que : $LB = JD$, $\widehat{ABL} = \widehat{JDC}$ et $\widehat{ALB} = \widehat{CJD}$.

2. Démontrer que les triangles (A, B, L) et (A, D, I) sont symétriques par rapport à la droite (AC) .

En déduire que $DI = BL$, $DI = DJ$, $\widehat{ADI} = \widehat{ABL}$ et $\widehat{ADI} = \widehat{JDC}$.

3. Démontrer que (C, D, J) et (A, D, I) sont deux triangles symétriques par rapport à une droite que l'on précisera.

En déduire que $S_{(AC)} \circ s_O = S_{(BD)}$.

7 - On donne un carré (A, B, C, D) de centre O et on désigne par I, J, K, L les milieux respectifs de (A, B); (B, C); (C, D); (D, A).

1. On pose $AB = a$. Calculer AL, DK, BL et AK en fonction de a .

En déduire qu'il existe une isométrie i par laquelle les trois points A, B, L ont respectivement pour image D, A et K.

2. Déterminer les images de A, B et L par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC), puis les images de A, D et I par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (LJ).

En déduire que $i = S_{(LJ)} \circ S_{(AC)}$.

8 - On donne trois points A, B, C tels que :

$$AB = a, \quad BC = 2a \quad \text{et} \quad (AB) \perp (BC), \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. On appelle G le point défini par : $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exprimer \overrightarrow{AG} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Construire G.

Quelle est la nature du quadruplet (A, B, G, C)?

2. Calculer les distances GC, GB, GA.

9 - (A, B, C) est un triangle rectangle en A et tel que $AB = a$, $AC = 2a$ (a réel positif donné). Le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

1. Calculer les distances BC, BH, CH, en fonction de a .

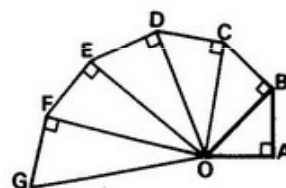
2. Démontrer que $\cos \widehat{ABC} = \cos \widehat{HAC}$. Que peut-on en déduire pour les angles \widehat{ABC} et \widehat{HAC} ?

10 - 1. Construire un triangle (O, A, B) rectangle et isocèle, tel que $OA = AB = 1$. Calculer OB.

2. Construire successivement, comme l'indique la figure ci-contre, les triangles rectangles (O, B, C), (O, C, D), (O, D, E), (O, E, F), (O, F, G), tels que $BC = 1$.

$CD = 1$, $DE = 1$, $EF = 1$, $FG = 1$.

Calculer les distances OC, OD, OE, OF, OG.



11 - (A, B, C) étant un triangle, on désigne par H la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

1. Construire un triangle (A, B, C) vérifiant les conditions suivantes :

$$BC = 8, \quad BH = 3, \quad BA = 5.$$

2. Le point M étant le milieu de (B, C), calculer AH, AC, AM.

3. Vérifier que : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

12 - (A, B, C) étant un triangle, on désigne par H la projection orthogonale de A sur la droite (BC) et par O le milieu du bipoint (B, C).

1. Montrer que si $AB \leq AC$, alors H appartient à [OB].

2. Construire (A, B, C) de manière que l'on ait $BC = 6$, $OH = 1$, $AH = 3$, $AB < AC$.
3. Calculer les distances AB et AC. Vérifier que $AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot OH$.

13 - Deux points A et B sont tels que $AB = 50$. $[Ax)$ et $[By)$ sont deux demi-droites perpendiculaires à la droite (AB) et situées dans un même demi-plan de frontière (AB). C est le point de $[Ax)$ tel que $AC = 40$ et D est le point de $[By)$ tel que $BD = 30$.

1. Construire le point I de la droite (AB) tel que $CI = DI$.
2. Calculer AI et BI.

(On posera $AI = x$ et on exprimera BI, CI et DI en fonction de x .)

14 - Dessiner un trapèze (A, B, C, D) vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (BC) \parallel (AD) \text{ et } (AB) \perp (BC) \\ BC = 2AB \\ (AC) \perp (CD). \end{cases}$$

On pose $AB = a$, calculer AC en fonction de a .

Démontrer que $\widehat{CAD} = \widehat{BCA}$. Calculer $\cos \widehat{BCA}$, puis AD, CD et BD en fonction de a .

15 - 1. Une droite D étant donnée, quel est l'ensemble des centres des cercles de rayon 3, tangents à la droite D?

2. On donne deux droites perpendiculaires $(x'x)$ et $(y'y)$ sécantes en O. On désigne par A et B les points de $[Ox)$ tels que $OA = 1$ et $OB = 5$.

a) Construire un cercle C de centre I de rayon 3, passant par A et tangent à $(y'y)$.

b) Calculer la distance IK de I à la droite $(x'x)$.

c) On pose $\{H\} = C \cap (y'y)$. Calculer HA et HB.

d) Démontrer que $\widehat{OHA} = \widehat{OBH}$.

16 - On donne un cercle C de centre O et de rayon r . Soit $[AB]$ un diamètre de C. Une droite Δ parallèle à (AB) coupe C en C et D. On désigne par I le milieu de (C, D).

1. Démontrer que (OI) est axe de symétrie de {A, B, C, D}.

2. Démontrer que $AC = BD$ et $AD = BC$.

3. Démontrer que $AC^2 + AD^2 = 4r^2$.

4. Dans le cas où $OI = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, calculer CD.

H étant la projection orthogonale de C sur la droite (AB), calculer OH, AC, AD.

17 - On donne un cercle C de rayon 2,5. On désigne par $[AB]$ un des diamètres de C.

1. H est le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AH \cdot AB = 40$. Calculer AH.

M est un point de la droite D perpendiculaire à (AB) en H et tel que $HM = 6$. Calculer AM et $\cos \widehat{BAM}$.

2. La droite (AM) est sécante à C en A et M'. Calculer AM'.
Vérifier que $AM \cdot AM' = 40$.

3. N est un point quelconque de la droite D. La droite (AN) est sécante à C en A et N'. On pose $HN = x$, exprimer AN, $\cos \widehat{BAN}$, AN' en fonction de x . Vérifier que $AN' \cdot AN = 40$.

18 - On donne un cercle \mathcal{C} de centre O de rayon R et un point P extérieur à \mathcal{C} .
Le cercle de diamètre $[OP]$ coupe \mathcal{C} en A et A' .

1. Démontrer que les droites (PA) et (PA') sont tangentes à \mathcal{C} respectivement en A et A' .
2. Démontrer que $PA = PA'$ et que la droite (OP) est la bissectrice du couple de demi-droites $([PA), [PA'))$.
3. Utiliser les résultats de la première question :
 - a) Pour montrer que par un point extérieur à un cercle on peut mener deux tangentes et deux seulement à ce cercle.
 - b) Pour trouver une construction géométrique de ces tangentes.

19 - On donne une droite D et deux points A et B n'appartenant pas à D .
Construire un triangle isocèle (A, B, C) , $(AB = AC)$, tel que C appartienne à D .
Comment faut-il choisir la droite D et les points A et B pour que la construction soit possible?

20 - On donne une droite D et deux points A et B n'appartenant pas à D .
Construire un triangle (A, B, C) rectangle en C tel que C appartienne à D .
A quelle condition la construction est-elle possible?
A quelle condition trouve-t-on deux triangles? A quelle condition en trouve-t-on un seul?

21 - \mathcal{C} est un cercle de centre O de rayon 3.
 D est la tangente à \mathcal{C} en un point A .

1. P étant un point de la droite D tel que $\cos \widehat{AOP} = \frac{3}{5}$. Calculer OP et AP . Montrer qu'il existe un autre point P' de D tel que $\cos \widehat{AOP'} = \frac{3}{5}$.
2. Soit M un point quelconque du plan, extérieur à \mathcal{C} et (MB) une droite passant par M et tangente à \mathcal{C} au point B .
Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\cos \widehat{BOM} = \frac{3}{5}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

22 - On donne un cercle \mathcal{C} de centre O de rayon R , tangent en A à une droite D . Soit B un point de D ($B \neq A$) et I le milieu de (A, B) . On mène, par I , la tangente en H à \mathcal{C} ($H \neq A$) et on désigne par O' le point d'intersection de la droite (OH) et de la perpendiculaire en B à la droite D .

1. Démontrer que :
 - a) les triangles (A, O, I) et (H, O, I) sont deux triangles rectangles isométriques.
 - b) les triangles (I, B, O') et (I, H, O') sont deux triangles rectangles isométriques.
 - c) le cercle de centre O' et de rayon OH est tangent à la droite D et au cercle \mathcal{C} .
2. Démontrer que le triangle (A, H, B) est rectangle en H .
3. La droite (OI) coupe la droite (AH) en K et la droite $(O'I)$ la droite (BH) en L . Quelle est la nature du quadruplet (H, L, I, K) ?
4. Soit J le milieu de (O, O') . Montrer que la droite D est tangente au cercle de diamètre $[OO']$.

23 - On donne un triangle (A, B, C) rectangle en B .
Soit D et E les points définis par $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour les directions des droites (AC) et (DE) ?
2. Soit H la projection orthogonale de B sur la droite (DE) . Démontrer que :
 - a) les triangles (A, B, C) et (A, H, C) sont isométriques.
 - b) $\widehat{HAC} = \widehat{BDE}$.
3. Quel est le centre du cercle \mathcal{C} qui passe par H, D et B ?
Démontrer que les droites (BC) et (CH) sont tangentes à \mathcal{C} .

Nota. Dans les cinq problèmes qui vont suivre, les mesures algébriques des bipoints sont calculées sur l'un des axes euclidiens ayant pour supports les droites déterminées par ces bipoints.

24 - Une droite D est sécante en A et B à un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R .
Soit B' le point symétrique de B par rapport à O .

1. Montrer que la tangente en B' au cercle \mathcal{C} coupe la droite D en un point P et que les triangles (P, B, B') et (P, A, B') sont rectangles.
2. Démontrer que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PB'}^2$.

25 - Une droite D est sécante en A et B à un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R . Soit E le point symétrique de B par rapport à O .
 P étant un point de D n'appartenant pas au segment $[AB]$, la droite (PE) recoupe \mathcal{C} en F .

1. Démontrer que les triangles (P, B, F) et (P, A, E) sont rectangles.
2. Démontrer que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PE} \cdot \overline{PF}$.

26 - Une droite D est sécante en A et B à un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R . Soit H le point symétrique de B par rapport à O .
Une sécante au cercle \mathcal{C} passe par H , coupe le segment $[AB]$ en P et recoupe le cercle \mathcal{C} en K .

1. Démontrer que $\widehat{APH} = \widehat{BPK}$.
2. En déduire que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PH} \cdot \overline{PK}$.

27 - On donne un cercle \mathcal{C} de centre O de rayon R et un point P n'appartenant pas à \mathcal{C} . Une sécante au cercle passant par P coupe \mathcal{C} en A et B .
On désigne par I le milieu de (A, B) .

1. Calculer \overline{PA} en fonction de \overline{PI} et de \overline{IA} , puis \overline{PB} en fonction de \overline{PI} et de \overline{IB} .
2. En déduire que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PI^2 - AI^2 = PI^2 - BI^2$.
3. Exprimer PI^2 en fonction de OP et de OI , puis AI^2 en fonction de R et de OI .
4. A partir des résultats des 2^e et 3^e questions, montrer que :

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = OP^2 - R^2.$$

En déduire que le produit $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ ne dépend pas de la sécante issue de P utilisée dans la démonstration.

28 - 1. On donne un cercle C de centre O de rayon R et un point P extérieur au cercle C .

Par P on mène :

- une droite qui coupe C en A et B .
- une droite tangente en M à C .

a) Démontrer que $PM^2 = OP^2 - R^2$.

b) d'après le résultat de l'exercice 24 montrer que :

$$PM^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

2. Application. Soit : H et K deux points d'une droite D , C et C' deux cercles de centres O et O' , tangents respectivement en H et K à D et sécants entre eux en A et B . La droite (AB) coupe D en P .
Démontrer que P est le milieu de (H, K) .

29 - On donne un cercle C de centre O , de rayon R et un point M de la tangente en A à C . Le cercle C' de centre M et de rayon MA coupe C en A et B .

1. Démontrer que B est symétrique de A par rapport à la droite (MO) et que la droite (MB) est tangente à C en B .

2. Sachant que $OA = 2$ et $MA = \sqrt{3}$, calculer MO , $\cos \widehat{MOA}$, $\cos \widehat{OMA}$ et AB .

30 - On donne un cercle C de centre O , de rayon R et un diamètre D de ce cercle.

1. Soit A un des points d'intersection de D et de C , et soit I le milieu de (O, A) . Démontrer que le cercle de centre I , passant par O est tangent intérieurement à C en A .

2. Soit P un point quelconque de D et J le milieu de (O, P) . Démontrer que :

- a) si P est extérieur au cercle C alors le cercle de diamètre (OP) est sécant à C .
- b) si P est intérieur au cercle C alors le cercle de diamètre (OP) est intérieur à C .

31 - On donne :

- Deux droites $(x'x)$ et $(y'y)$ sécantes en O .
- Δ la bissectrice du couple de demi-droites (Ox, Oy) .
- I un point de Δ .

I se projette orthogonalement en H sur $(x'x)$ et en K sur $(y'y)$.

1. Soit A un point de $(x'x)$ différent de H . Démontrer que les droites $(x'x)$ et $(y'y)$ sont sécantes au cercle C de centre I et de rayon IA .

2. Soit $C \cap (x'x) = \{A, B\}$ et $C \cap (y'y) = \{A', B'\}$.
Démontrer que $AB = A'B'$.

3. Sachant que $OI = 6$, $\cos \widehat{AOI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $AI = 5$,
calculer OH , IH et AB .

32 - On donne deux cercles C et C' , de centres O et O' , de rayon R et R' sécants en A et B .

Soit P un point de la droite (OO') .

La droite (PA) sécante à C et C' en A recoupe ces cercles respectivement en M et N .
La droite (PB) sécante à C et C' en B recoupe ces cercles, respectivement en M' et N' .

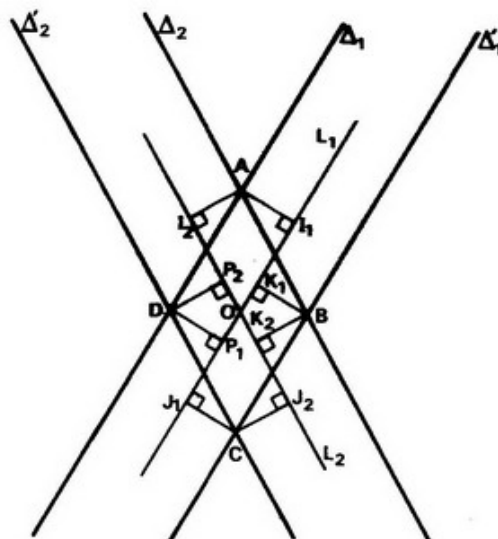
1. Démontrer que les segments $[MN]$ et $[M'N']$ sont symétriques par rapport à (OO') .

2. Démontrer que $MN = M'N'$, $MN' = NM'$ et que les droites (MN') et $(M'N)$ se coupent en un point P' de la droite (OO') .

3. Démontrer que $\widehat{NMN'} = \widehat{NM'N'}$ et $\widehat{MNM'} = \widehat{MN'M'}$.

33 - Soit deux droites L_1 et L_2 sécantes en O , $\Delta_1 \cup \Delta_1'$ l'ensemble des points situés à la distance 1 de L_1 et $\Delta_2 \cup \Delta_2'$ l'ensemble des points situés à la distance 1 de L_2 .

Soit : $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{A\}$
 $\Delta_2 \cap \Delta_1' = \{B\}$
 $\Delta_2' \cap \Delta_1' = \{C\}$
 $\Delta_1 \cap \Delta_2' = \{D\}$.



a) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à l'un ou l'autre des axes de symétries de $L_1 \cup L_2$.

b) Soit I_1, K_1, J_1, P_1 les projections orthogonales de A, B, C, D sur L_1 .
 et I_2, K_2, J_2, P_2 les projections orthogonales de A, B, C, D sur L_2 .

Montrer que (I_1, J_2, J_1, I_2) et (K_1, K_2, P_1, P_2) sont des rectangles.

Montrer que (A, I_1, B, K_1) est un parallélogramme.