

Fonctions Polynomes

1 - On considère la fonction f telle que :

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x - 2y + 1$$

1. Calculer les images par f des couples suivants :

$$(0, 0); \quad (-5, -2); \quad (3, 7); \quad (2\sqrt{3} + 1, \sqrt{3}); \quad \left(-\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right).$$

2. On considère l'équation : $f(x, y) = 0$.

Soit a un réel donné. Déterminer y en fonction de a pour que (a, y) soit solution de cette équation.

Soit b un réel donné. Déterminer x en fonction de b pour que (x, b) soit solution de cette équation.

3. Représenter graphiquement, dans le plan rapporté à un repère cartésien, l'ensemble S des solutions de l'équation proposée.

2 - Soit l'équation, dans \mathbb{R}^2 : $3x + 0y - 2 = 0$.

1. Peut-on déterminer x tel que $(x, -5)$ soit solution de cette équation?

2. Peut-on déterminer y tel que $(2, y)$ soit solution de cette équation?

3. Représenter graphiquement, dans le plan P rapporté à un repère cartésien, l'ensemble S des solutions de cette équation.

3 - Résoudre les systèmes suivants et en donner l'interprétation graphique dans le plan P rapporté à un repère cartésien :

$$1. \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ 2x - y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{8}{5}y = -4 \\ 7 + 3y = -11 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 7x + 5y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = -9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 13x - 7y = 20 \\ x + 21y = -20 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3} \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1 \\ 2x + 5y = 15 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -x + \frac{3y}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{3x}{2} + y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 0,2x - y = 0,6 \\ 0,25 - 1,25y = -0,5 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{1-x}{3} = 0 \\ \frac{x-y}{2} + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 11. \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 7x - 8y = 0 \end{cases} & 13. \begin{cases} \frac{x-3}{4} + \frac{2y-5}{2} = -3 \\ \frac{7x-10}{5} + \frac{3y+4}{2} = \frac{11}{2} \end{cases} \\
 12. \begin{cases} \frac{x-2y}{3} + \frac{x-1}{2} = -\frac{5}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{4y+1}{3} = -2 \end{cases} & 14. \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 2y - 4 = 5x - 2 \end{cases}
 \end{array}$$

4 - Résoudre, dans \mathbb{R}^2 , les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ -16x + 21y = 1 \end{cases} & 2. \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2x = 3y + 4 \end{cases} \\
 3. \begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 0,75 \\ 1,2x - 2,4y = 3 \end{cases} & 4. \begin{cases} y = \frac{5}{2}x - 3 \\ x = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases} \\
 5. \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{8} - \frac{3}{2} = 0 \\ -\frac{3x}{10} + \frac{y}{5} + \frac{11}{5} = 0 \end{cases} & 6. \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y}{7} + \frac{5}{21} = 0 \end{cases} \\
 7. \begin{cases} 0,6x - 2,5y = 4 \\ 3,2x + 1,5y = 6,5 \end{cases} & 8. \begin{cases} 0,4x + 0,6y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \\
 9. \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}y = 0 \\ \frac{2}{9}x + \frac{5}{6}y = 0 \end{cases} & 10. \begin{cases} x - \sqrt{3}y = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}x - 5y = 7 \end{cases} \\
 11. \begin{cases} (1 - \sqrt{5})x + y = 1 - \sqrt{5} \\ -4x + (1 + \sqrt{5})y = 5 + \sqrt{5} \end{cases} & 12. \begin{cases} (2 + \sqrt{3})x - y = 5 \\ -2\sqrt{3}x + 2y = 4 \end{cases}
 \end{array}$$

5 - On donne, dans \mathbb{R}^2 , l'équation suivante :

$$ax + by + 3 = 0 \quad (a \text{ et } b \text{ réels}).$$

Déterminer les réels a et b pour que les couples $(-1, 3)$ et $(0, 2)$ soient solutions de cette équation.

6 - Le plan P est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Résoudre les équations suivantes, et représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune d'elles.

$$\begin{array}{ll}
 a) xy = 0; & (x-3)(x+4) = 0. \\
 b) x^2 - y^2 = 0; & x(y-2)(2x-1) = 0 \\
 c) (2x+y-1)(x+3) = 0; & (x-1)^2 - (2y+4)^2 = 0
 \end{array}$$

7 - 30 livres sont empilés les uns sur les autres. La hauteur de la pile atteint 116 cm. Certains de ces livres ont une épaisseur de 6 cm, les autres ont une épaisseur de 2 cm. Trouver le nombre de livres de chaque sorte.

8 - On considère un rectangle (A, B, C, D). La mesure, selon le mètre, de son périmètre est $2p$ ($p \in \mathbb{R}$). On appelle x et y les mesures de ses dimensions, selon le mètre. Si on augmente x de 7 et y de 2, la mesure de l'aire du rectangle augmente de 128.

1. Exprimer x et y en fonction de p .
2. Pour quelles valeurs de p , le problème est-il possible?
3. Pour quelles valeurs de p , le rectangle est-il un carré?
4. Calculer x et y lorsque $p = 54$.

9 - Résoudre, dans \mathbb{R}^2 , les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = -3 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{3}{y} = 3 \\ -\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$$

(On fera le changement d'inconnues $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$ et l'on calculera X et Y afin d'en déduire x et y .)

10 - Le plan P étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , représenter graphiquement, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient les inéquations :

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| a) $x - 5 > 0$ | b) $2y + 1 \leq 0$ |
| c) $x - 2y + 3 < 0$ | d) $2x + 3y - 1 \leq 0$ |
| e) $2x + y \geq 0$ | f) $5x - 3y + 3 < 0$ |

11 - Le plan P étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , représenter graphiquement les ensembles de points M dont les coordonnées (x, y) vérifient les conditions suivantes :

- | | |
|---|---|
| a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 3 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 3 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} x < 0 \\ x - 2y + 3 < 0 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} y - 2 < 0 \\ 2x + 3y + 1 \geq 0 \end{cases}$ |
| e) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 3 \geq 0 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 < 0 \\ x + 2y - 1 \geq 0 \end{cases}$ |
| g) $x(y - 3) \leq 0$ | h) $(x - 3y + 1)(2x - 1) \geq 0$ |
| i) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y + 1 < 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$ | j) $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ 2x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$ |

12 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto 2x - y + 1$

et la fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto -x + y + 1$

Représenter graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$f(x, y) = g(x, y)$$

puis l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$f(x, y) \geq g(x, y).$$

13 - Le plan P étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$-2 \leq y - 3 \leq x + 2.$$

1. Montrer que l'ensemble E est aussi l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$y - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x - y + 5 \geq 0.$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble E.

3. Quelles sont les relations vérifiées par les coordonnées des points appartenant au complémentaire de E dans le plan P?

14 - Le plan P est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Représenter graphiquement l'ensemble E des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que :

$$y + 1 < 2x - 1 < -2y + 2.$$

2. Quelles sont les relations vérifiées par les coordonnées des points appartenant au complémentaire de E dans le plan P?