PROPRIETE DU COSINUS D'UN TRIANGLE GEOMETRIQUE
THEORIE DE PYTHAGORE

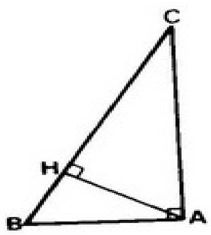
Exercice 1.

Soit (Ox, Oy) un représentant de l'angle géométrique $\widehat{xOy}$. A est un point de $[Oy)$ et A' sa projection orthogonale sur la droite $(x'x)$ contenant la demi-droite $[Ox)$.

1. Exprimer $\cos\widehat{xOy}$ en fonction de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$. Montrer que $d(O, A') \leq d(O, A)$ (ou $OA' \leq OA$).

2. B étant un autre point de $[Oy)$ et B' sa projection orthogonale sur $(x'x)$, on a vu que : $\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\widehat{xOy}$ (Ex. 7, chap. 13). Montrer que $d(A', B') \leq d(A, B)$ (ou $A'B' \leq AB$).

Exercice 2.



(A, B, C) est un triangle rectangle en A.

1. $\widehat{ABC}$ étant l'angle en B du triangle (A, B, C).
Montrer que $\cos\widehat{ABC} > 0$ et $\cos\widehat{BCA} > 0$.

2. Montrer qu'un triangle rectangle a un angle droit et deux angles aigus.

3. Montrer que $AB < BC$ et $AC < BC$.

4. H étant la projection orthogonale de A sur (BC), montrer que H appartient au segment [BC].

Exercice 3.

(A, B, C) est un triangle isocèle tel que $AB = AC$.

1. Montrer que la projection orthogonale de A sur la droite (BC) appartient au segment [BC].

2. Montrer que les angles égaux du triangle isocèle (A, B, C) sont aigus.

Exercice 4.

(A, B, C) est un triangle rectangle en A, dans un plan euclidien. Sachant que :

a) $AB = 4$ et $AC = 3$, calculer BC.

b) $AB = 3{,}6$ et $AC = 4{,}8$, calculer BC.

c) $AB = 7{,}5$ et $BC = 12{,}5$, calculer AC.

Exercice 5.

(M, N, P) est un triangle rectangle en P. Sachant que :

a) $MN = 25$ et $MP = 20$, calculer NP.

b) $MP = \sqrt{3}$ et $NP = 1$, calculer MN.

c) $MP = 2$ et $NP = 5$, calculer MN.

Exercice 6.

(A, B, C) est un triangle rectangle en A et isocèle $(AB = AC)$.

1. Calculer BC sachant que :

a) $AB = AC = 2$.

b) $AB = AC = \sqrt{3}$.

c) $AB = AC = a \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 7.

(A, B, C) est un triangle équilatéral.
(AH) est la hauteur passant par A. $(H \in (BC).)$

1. Calculer AH sachant que : *a)* $AB = 2$
b) $AB = a \ (a \in \mathbb{R}_+^*)$

2. Calculer AB sachant que : *a)* $AH = 3$
b) $AH = 2\sqrt{3}$
c) $AH = h \ (h \in \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 8.

Le triangle (A, B, C) est-il rectangle si :

a) $AB = 3$ $AC = 4$ $BC = 5$?
b) $AB = 10$ $AC = 6$ $BC = 8$?
c) $AB = 4$ $AC = 5$ $BC = 7$?
d) $AB = \sqrt{3}$ $AC = 1$ $BC = \sqrt{2}$?
e) $AB = 2\sqrt{5}$ $AC = 5$ $BC = 5\sqrt{3}$?

Exercice 9.

(A, B, C) est un triangle rectangle en A.

1. Sachant que $AB=4$, $BC=9$, calculer AC.
2. Soit H la projection orthogonale de A sur (BC).

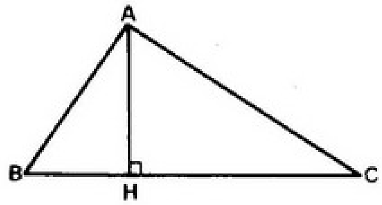
Exprimer $\cos\widehat{ABC}$ de deux façons différentes. Utiliser ce résultat pour calculer BH

3. Calculer AH dans le triangle rectangle (A, B, H).
4. Calculer $\cos\widehat{HAC}$. Utiliser ce résultat pour montrer que $\widehat{ABC}=\widehat{HAC}$.

Exercice 10.

(A, B, C) est un triangle rectangle en A.

H est la projection orthogonale de A sur (BC).



1. Calculer $\cos\widehat{ABC}$ de deux façons différentes.

Utiliser ces deux expressions de $\cos\widehat{ABC}$ pour montrer que $\overline{BH}\cdot\overline{BC}=AB^2$.

2. Montrer que $\overline{CH}\cdot\overline{CB}=AC^2$.

Dans un triangle (A, B, C), rectangle en A. Si H est la projection orthogonale de A sur (BC)	alors, $\begin{cases} BA^2=\overline{BH}\cdot\overline{BC} \\ CA^2=\overline{CH}\cdot\overline{CB} \end{cases}$

Exercice 11.

(A, B, C) est un triangle rectangle en A. H est la projection orthogonale de A sur (BC).

1. Montrer que : $AH^2=AB^2-BH^2$

$AH^2=AC^2-CH^2$.

2. Utiliser les égalités précédentes pour démontrer que :

$$AH^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC}.$$

(On rappelle que, d'après la formule de Chasles, $\overline{BH}+\overline{HC}=\overline{BC}$.)

Dans un triangle (A, B, C) rectangle en A, si H est la projection orthogonale de A sur (BC), alors :

$$AH^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC}.$$

Exercice 12.

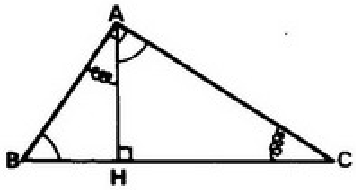
(A, B, C) est un triangle rectangle en A.

1. Exprimer $\cos\widehat{ABC}$ en fonction de AB et de BC.

$\cos\widehat{ACB}$ en fonction de AC et de BC.

2. Montrer que $\cos^2\widehat{ABC}+\cos^2\widehat{ACB}=1$.

Exercice 13.



(A, B, C) est un triangle rectangle en A.
H est la projection orthogonale de A sur (BC).

1. D'après les résultats de l'exercice 12, exprimer $\cos^2 \widehat{BAH}$ en fonction de $\cos^2 \widehat{ABH}$.

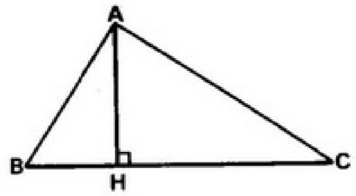
2. Montrer que $\cos^2 \widehat{BAH} = \cos^2 \widehat{ACB}$ (1).

3. En utilisant l'égalité (1) et sachant que les angles d'un triangle rectangle, autres que l'angle droit, sont aigus, démontrer que :

$$\widehat{BAH} = \widehat{ACB} \qquad (2)$$

4. Démontrer que l'égalité $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$ est vraie.

Exercice 14.



(A, B,C) est un triangle rectangle en A.
H est la projection orthogonale de A sur (BC).

1. Exprimer $\cos \widehat{BAH}$ dans le triangle rectangle (A, B, H).

2. Exprimer $\cos \widehat{ACB}$ dans le triangle rectangle (A, C, B).

3. Utiliser l'égalité (2) de l'exercice 13 et les expressions de $\cos \widehat{BAH}$ et $\cos \widehat{ACH}$, pour démontrer que :

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC.$$

> Dans un triangle (A, B, C) rectangle en A, si H est la projection orthogonale de A sur (BC) alors,
>
> $$AH \cdot BC = AC \cdot AB.$$

Exercice 15.

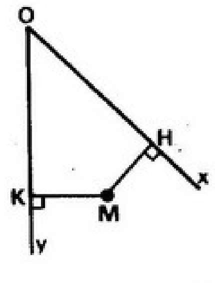
(A, B, C) étant un triangle rectangle en A, (AH) la hauteur passant par A. ($H \in (BC)$.) Calculer :

1. BC, AH, BH, CH sachant que $AB = 4$ et $AC = 3$.

2. BH, AC, BC, AH sachant que $AB = \sqrt{2}$ et $BC = 3$.

(On utilisera les égalités démontrées dans les exercices 10, 11 et 14.)

Exercice 16.



On donne un couple de demi-droites $([Ox, [Oy))$. Un point M du plan se projette orthogonalement en H sur $[Ox)$, et en K, sur $[Oy)$ de manière que $MK = MH$.

1. Démontrer que $OK = OH$.

2. Démontrer que M appartient à la bissectrice de (Ox, Oy).

Exercice 17 : Triangles rectangles isométriques.

1. Deux triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont isométriques.
Sachant que (A, B, C) est un triangle rectangle en A et que $AB = A'B'$, quelle est la nature du triangle (A′, B′, C′)? Quelles égalités de distances peut-on écrire?

2. Deux triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont rectangles respectivement en A et A′ et sont tels que $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$.

a) Démontrer que $AC = A'C'$.

b) En déduire que (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont isométriques.

3. Deux triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont rectangles respectivement en A et A′ et sont tels que $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

a) Exprimer cos $\widehat{ABC}$ dans le triangle (A, B, C) et cos $\widehat{A'B'C'}$ dans le triangle (A′, B′, C′).
Démontrer que $AB = A'B'$.

b) Montrer en utilisant la propriété démontrée à la question 2. que (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont isométriques.

4. Deux triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont rectangles respectivement en A et A′ et sont tels que $AB = A'B'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

a) Démontrer que $BC = B'C'$.

b) Montrer que (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont isométriques.

Conclusion.

Deux triangles (A, B, C) et (A′, B′, C′), respectivement rectangles en A et A′, sont isométriques, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$
2. $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ (ou $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$)
3. $AB = A'B'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$