ELEMENT DE TRIGONOMETRIE

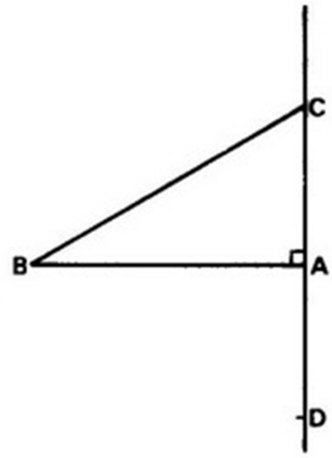
Exercice 1.

Soit un triangle (A, B, C) rectangle en A et tel que $E(\widehat{ABC}) = 30^0$.
Soit D le symétrique de C par rapport à A.

1. Calculer $E(\widehat{CBD})$ et $E(\widehat{BCA})$.
Quelle est la nature du triangle (B, C, D)?

2. On pose $BC = a$. Calculer CA et BA en fonction de a.

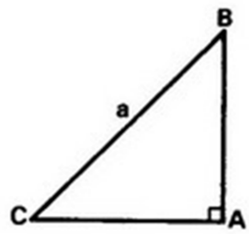
3. Quel est le signe de $\cos 30^0$? Calculer $\cos 30^0$. En déduire $\sin 30^0$. Calculer $\cos 60^0$, puis $\sin 60^0$.



Exercice 2.

Soit un triangle (A, B, C) isocèle et rectangle en A.

Calculer $E(\widehat{ABC})$.
On pose $BC = a$, calculer CA en fonction de a.
Calculer $\cos 45^0$ et $\sin 45^0$.



Des exercices 1 et 2 on déduit les résultats suivants :

écart en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
écart en degrés	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Exercice 3.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes ou équations suivants. Représenter à l'aide du rapporteur les angles dont les écarts angulaires sont solutions :

a) $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x < 0 \end{cases}$ *c)* $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4.

Mêmes questions que pour l'exercice 3.

a) $\begin{cases} 4\sin^2 x = 1 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2\cos^2 x = 1 \\ x \in [0,180] \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2\sin^2 x - 1 = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

Exercice 5.

(A, B, C) étant un triangle rectangle tel que $BA = 3$ et $\cos \widehat{ABC} = \frac{2}{5}$.

Calculer BC, $\sin \widehat{ABC}$ et CA.

Exercice 6.

Un triangle (A, B, C) est tel que $BC = 5$, $AC = 3$, $AB = 4$.
Vérifier que ce triangle est rectangle.

Calculer $\cos \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{ACB}$.

Donner, en utilisant les tables, une valeur approchée en degrés et minutes des écarts angulaires de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Calculer la somme des écarts angulaires trouvés. Que remarque-t-on? Pourquoi?

Exercice 7.

Soit un triangle (A, B, C) rectangle en A; on pose $BC = a$, $AB = c$, $CA = b$.

$E(\widehat{ABC}) = \beta \quad E(\widehat{ACB}) = \gamma$.

a) Connaissant $a = 8$ et $\cos\beta = 0{,}250$. Calculer c, b, $\cos\gamma$, $\sin\beta$ et $\sin\gamma$. Déterminer une valeur approchée en degré de γ et β.

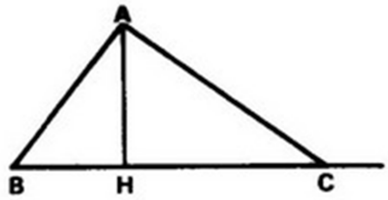
b) Connaissant $\cos\beta = 0{,}360$ *et* $b = 6$ calculer $\cos\gamma$, a, c, $\sin\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma$.
Déterminer une valeur approchée en degré de γ et β.

Exercice 8.

Soit un triangle (A, B, C) rectangle en A, tel que $BC=5$, $AB=3$, $AC=4$.

Soit H la projection orthogonale de A sur (BC).

Calculer $\cos\widehat{ABC}$, BH, AH, HC $\cos\widehat{BAH}$ et $\cos\widehat{HAC}$.



Exercice 9.

Sachant que α est l'écart angulaire d'un angle aigu et que $\sin\alpha = 0{,}450$.

1. Calculer $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$.
2. A l'aide des tables, déterminer α en degrés et minutes; déterminer $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ à partir de la valeur de α trouvée, et des tables trigonométriques.

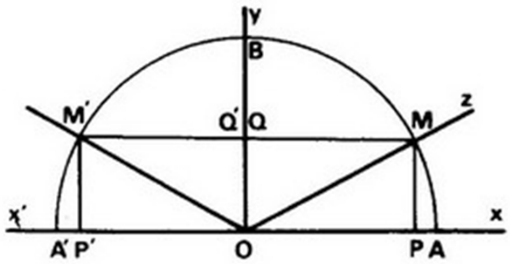
Comparer les résultats obtenus dans chacune des questions.

Exercice 10.

On utilise les notations du cours (voir définition de cosinus α et de sinus α).

Soit (Ox, Oz) un représentant d'un angle $\widehat{xOz}$, et M le point d'intersection de $[Oz)$ et du demi-cercle $\mathcal{C}$.

Soit M' le point symétrique de M dans la symétrie orthogonale par rapport à (Oy).



1. x et y étant les coordonnées du point M, déterminer en fonction de x et y, les coordonnées x' et y' du point M'.
2. Montrer que les angles géométriques $\widehat{xOz}$ et $\widehat{A'OM'}$ sont égaux.
3. Montrer que $E(\widehat{xOz}) + E(\widehat{xOM'}) = 180^0$.
4. En posant $E(\widehat{xOz}) = \alpha$ et $E(\widehat{xOM'}) = \beta$, montrer que :

$$\sin\beta = \sin\alpha \quad \text{et} \quad \cos\beta = -\cos\alpha.$$

On admettra l'équivalence :

$$\boxed{\alpha + \beta = 180^0 \iff \begin{cases} \sin\beta = \sin\alpha \\ \cos\beta = -\cos\alpha \end{cases}}$$

REMARQUE.

Si $\alpha + \beta = 180^0$, alors l'un des deux nombres α ou β appartient à l'intervalle $[0^0, 90^0]$.

5. **Application.**

On veut déterminer β sachant que $\cos\beta = -0{,}750$.

On pose $\alpha = 180^0 - \beta$; calculer $\cos\alpha$.

Déterminer α en degrés, à l'aide de la table.

Puis déterminer β en degrés.

6. On donne $\beta = 150^0$. On pose $\alpha = 180^0 - 150^0$, trouver $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ à l'aide des tables.

En déduire $\cos\beta$, $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ et $\operatorname{cotg}\beta$, à l'aide des formules admises précédemment.

Exercice 11.

En utilisant les résultats admis dans l'exercice précédent et le **tableau, déduits des exercices 1** et 2, compléter le tableau suivant :

écart en degrés	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
écart en radians	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cosinus					
sinus					
tangente					
cotangente					

Exercice 12 (difficile).

On considère un triangle isocèle (A, B, C) tel que $AB = AC$.

Soit H la projection orthogonale de A sur (BC) et K la projection orthogonale de B sur (AC).

a) Démontrer que $\widehat{BAH} = \widehat{CBK}$.

b) On pose $AB = a$ et $E(\widehat{BAC}) = \alpha$.

Démontrer que $BC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$; $BK = a\sin\alpha$; $BK = BC\cos\frac{\alpha}{2}\cdot$

En déduire que $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot$

c) Vérifier l'égalité $(A^2 - B^2)^2 = (A^2 + B^2)^2 - 4A^2\cdot B^2$, utiliser cette égalité et le résultat de *b*) pour vérifier que $\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos^2\alpha$.

On admet que $\cos\alpha$ et $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ sont de même signe.

En déduire que $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot$

et que $$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot$$

d) Utiliser les résultats précédents pour calculer :

$$\sin 15^0,\quad \cos 15^0,\quad \mathrm{tg}\,15^0.$$

Exercice 13.

Soit un triangle (A, B, C) rectangle en A tel que $AC = 5$ et $E(\widehat{ABC}) = 50^0$.

a) Démontrer que le cercle $\mathcal{C}$ de centre C, de rayon 5, coupe la droite (BC) en deux points D et E dont l'un appartient au segment [B, C].

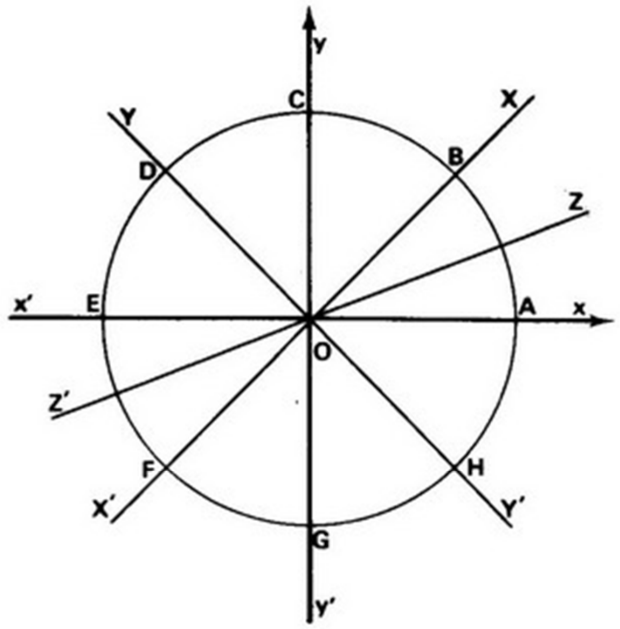
b) Calculer à 10^{-2} près AB, BC, AD, AE, BD, BE.

c) Les tangentes en D et E au cercle $\mathcal{C}$ coupent (AB) en D' et E'. Calculer à 10^{-2} près DD' et EE'.

d) Montrer que le triangle (D', C, E') est rectangle.

Exercice 14.

Soit deux droites $(x'x)$ et $(y'y)$ perpendiculaires, sécantes en O, et les droites (XX′) et (YY′) axes de symétrie de $(xx')\cup(yy')$. (Voir figure ci-contre.)



a) Montrer que $E(\widehat{XOy}) = E(\widehat{yOY})$

et que $E(\widehat{Y'Ox}) = E(\widehat{xOX})$.

En déduire que $(x'x)$ et $(y'y)$ sont axes de symétrie de $(XX')\cup(YY')$.

b) Un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R est sécant à $[Ox)$, [OX), $[Oy)$, [OY), $[Ox')$, [OX′), $[Oy')$ et [OY′), respectivement en A, B, C, D, E, F, G et H.

Montrer que $(x'x)$, $(y'y)$, (X′X), (Y′Y) sont des axes de symétries de l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} = L$.

c) Montrer que le quadruplet {A, B, E, F} est un rectangle et que {A, C, E, G} est un carré.

d) Donner en degrés, puis en radians, l'écart angulaire de $\widehat{AOB}$.

Soit (ZZ′) la bissectrice de (Ox, OX), telle que [OZ) soit du même côté que $[Oy)$ par rapport à $(x'x)$.

Calculer l'écart angulaire de $\widehat{Y'OZ}$ et de $\widehat{ZOy}$ en degrés et en radians.

Montrer que [OY′) et $[Oy)$ sont symétriques par rapport à (Z′Z).

En déduire que (Z′Z) est un axe de symétrie de L.

Exercice 15.

Soit un triangle (A, O, B) rectangle en O et tel que $AO = OB$.
Soit C un point de [OB], la droite perpendiculaire à (AC) et passant par B est sécante à (AO) en D et (AC) en H.

a) Montrer que $\widehat{BCH} = \widehat{ACO}$. En déduire que $\widehat{CAO} = \widehat{CBH}$ et que les triangles (B, O, D) et (A, C, O) sont isométriques.
Préciser les images de B, O et D dans cette isométrie.
b) La perpendicualaire à (AH) contenant O, est sécante à (CA) en I. La perpendiculaire à (BD) contenant O, est sécante à (BD) en J.
Montrer en utilisant la question *a*, que $OI = OJ$.
En déduire que la droite (HO) est bissectrice de ([HD), [HC)).

c) Montrer que $E(\widehat{CDO}) = 45^0$ et que la droite (DC) est perpendiculaire à la droite (AB).

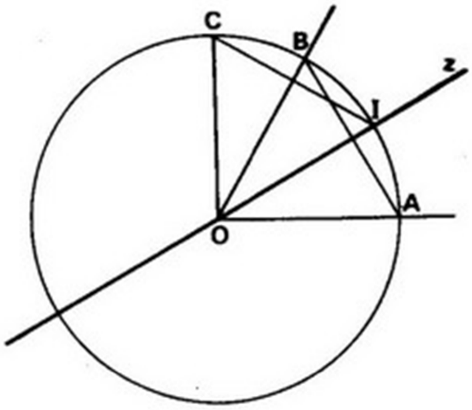
d) On pose $OA = 5$ et $OC = x$, calculer en fonction de x les distances OD, BC, AC et BH.

Exercice 16.

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R ($R>0$), A et B deux points de $\mathcal{C}$ tels que $E(\widehat{AOB})=60^0$.

Soit [Oz) la demi-droite dont le support est la bissectrice de (OA, OB) et située du même côté que [OB) par rapport à (OA).

Soit I le point commun à [Oz) et à $\mathcal{C}$ et C le symétrique de I dans la symétrie orthogonale par rapport à (OB).



1. Montrer que C appartient à $\mathcal{C}$.
Montrer que (O, I, C) est un triangle équilatéral et que (OC) et (OA) sont perpendiculaires.

2. Soit D le point commun à (CI) et (BA).
Soit Δ l'axe de symétrie de $[OB)\cup[OI)$.
Quelle est l'image de la droite (BA) par la symétrie orthogonale S_Δ.
Montrer que Δ est axe de symétrie de l'ensemble {C, B, I, A, O}.

3. Quelle est la nature du triangle (D, C, A)?

Déterminer en degrés $E(\widehat{CDA})$ et $E(\widehat{DCA})$.

Montrer que $E(\widehat{IBA})=E(\widehat{ICA})=E(\widehat{BIC})=E(\widehat{BAC})$.

Exercice 17.

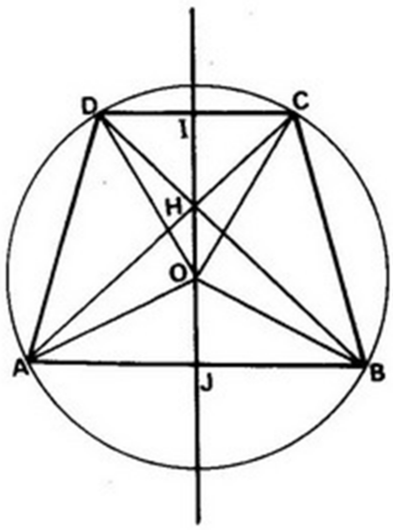
Soit sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon R, quatre points A, B, C, D tels que

$$E(\widehat{AOB})=120^0 \quad E(\widehat{BOC})=90^0 \quad E(\widehat{COD})=60^0$$

a) Calculer $E(\widehat{ODA})$.
Soit Δ la médiatrice de (A, B), montrer que la droite (OC) a pour image la droite (OD) par la symétrie orthogonale S_Δ.
Montrer que Δ est axe de symétrie de l'ensemble {A, B, C, D, O}.
Montrer que (AB) est parallèle à (DC).

b) Montrer que :
$E(\widehat{ACO})=E(\widehat{OAC})=E(\widehat{ODB})=E(\widehat{DBO})$.

Calculer :
$E(\widehat{DCO})$, $E(\widehat{OCB})$, $E(\widehat{ABO})$, $E(\widehat{OBC})$.



Montrer que les droites (AC) et (DB) sont perpendiculaires.

c) Montrer que le triangle (H, D, C) est rectangle isocèle :

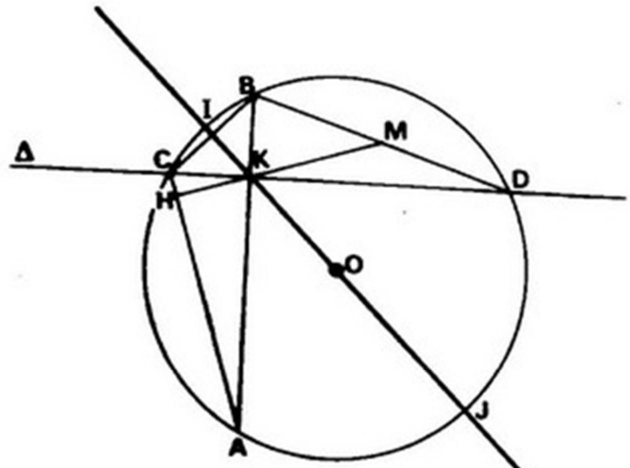
$$(\{H\}=(AC)\cap(DB)).$$

En déduire $E(\widehat{DCH})$, $E(\widehat{HCO})$
$E(\widehat{HCB})$, $E(\widehat{CBH})$, $E(\widehat{HBA})$.

d) Calculer DC, CB, AB, HC, HB, HI, HJ, OI, OJ en fonction de R. (I et J sont les points d'intersection de Δ avec (DC) et (AB).

Exercice 18.

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon R, et un diamètre sécant à $\mathcal{C}$ en I et J.
Soit K un point de [IO], et Δ une droite contenant K, sécante à $\mathcal{C}$ en C et D telle que $E(\widehat{IKC}) = 45^0$.



a) La droite perpendiculaire en K à (CD) est sécante au cercle en A et B (voir schéma).

Trouver un axe de symétrie de l'ensemble {B, D, A, C}.

Montrer que $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.

b) Soit M le milieu de (B, D) et H le point d'intersection de (KM) et de (CA).

Montrer que $E(\widehat{KCH}) + E(\widehat{CKH}) = 90^0$.

En déduire que la droite (KM) est orthogonale à la droite (CA).

Exercice 19.

On donne un triangle (A, B, C). Soit H la projection orthogonale de B sur la droite (AC).

a) Démontrer que $AB^2 - BC^2 = AH^2 - HC^2$.

b) Soit $\vec{D}$ un axe euclidien associé à la demi-droite [AC).

Démontrer que sur $\vec{D}$, $\overline{AH} = AB \cos \widehat{BAC}$.

et $$\overline{HC} = \overline{AC} - AB \cos \widehat{BAC} = AC - AB \cos \widehat{BAC}.$$

Exprimer $AH^2 - HC^2$ en fonction de AC, AB et de $\cos \widehat{BAC}$.

c) Déduire de *b*. la relation

$$BC^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}.$$

Sachant que $AB = 3$, $AC = 5$ et $E(\widehat{ABC}) = 60^0$, construire le triangle (A, B, C) et calculer BC.