

PLAN EUCLIDIEN

1 - Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Placer par rapport à ce repère, les points : $A(2,3)$, $B(2,-3)$, $C(-2,3)$, $D(-2,-3)$.

2. Soit M un point de coordonnées (x,y) et M' un point de coordonnées (x',y') .
Démontrer que :

- a) M et M' sont symétriques par rapport à $(x'Ox) \iff x' = x \text{ et } y' = -y$.
 b) M et M' sont symétriques par rapport à $(y'Oy) \iff x' = -x \text{ et } y' = y$.
 c) M et M' sont symétriques par rapport à $O \iff x' = -x \text{ et } y' = -y$.

2 - Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère l'application f définie dans P par : à tout point $M(x,y)$ on associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées des points A' et B' images par f de $A(1,2)$ et $B(-2,-3)$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$.

2. M étant un point quelconque et M' son image par f ; calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
En déduire la nature de l'application f .

3 - Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère l'application f définie dans P par : à tout point $M(x,y)$ on associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées des points O' et A' , images par f , de O et du point $A(2,1)$.
Montrer que (O, O') et (A, A') ont même milieu I .

2. M étant un point quelconque et M' son image par f , calculer les coordonnées du milieu de (M, M') .
En déduire la nature de l'application f .

4 - Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère l'application f définie dans P par : à tout point $M(x,y)$ on associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées des points A' et B' , images par f , des points $A(-1,-2)$; $B(2,1)$.

Déterminer les coordonnées du milieu I de (A, A') et montrer que la droite (IB) est perpendiculaire à (AA') .

Quelle est l'équation de la droite (IB) .

2. M étant un point quelconque et M' son image par f , montrer que le milieu de (M, M') appartient à (IB) et que la droite (MM') est perpendiculaire à (IB) .
En déduire la nature de l'application f .

5 - Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère l'application f définie dans P par : à tout point $M(x, y)$ on associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées des points A' et B' images par f , de $A(0, 1)$ et $B(3, 1)$.
Déterminer les coordonnées du point I milieu de (AA') et montrer que la droite (IB) est perpendiculaire à (AA') .

Quelle est l'équation de la droite (IB) .

2. M étant un point quelconque et M' son image par f , calculer en fonction de x et de y seulement, les coordonnées du milieu J de (M, M') .

Vérifier que J appartient à la droite d'équation $x - y - 2 = 0$.

Calculer en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à \overrightarrow{IB} .

En déduire la nature de l'application f .

6 - On donne par rapport à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les points $A(2, 5)$; $B(2, -1)$; $C(-2, -5)$; $D(-2, 1)$.

1. Soit E le point symétrique de D par rapport à la droite (AB) et F le point tel que (B, A, E, F) soit un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées de E et de F .

2. Soit G le point symétrique de A par rapport à la droite (DC) et H le point tel que (C, D, G, H) soit un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées de G et de H .

3. Montrer que O est le centre de symétrie pour l'ensemble $\{A, E, F, B, C, H, G, D\}$.

7 - Les points A, B, C, D du plan sont déterminés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$A\left(-\frac{5}{3}, 0\right); \quad B(2, 1); \quad C\left(\frac{8}{3}, 3\right); \quad D(-1, 2).$$

1. Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BC} . Quelle est la nature du quadruplet (A, B, C, D) ?

2. Démontrer que le triangle (B, O, D) est rectangle et isocèle.

3. Calculer les coordonnées du centre I et le rayon du cercle \mathcal{C} , passant par O, B et D .

4. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont tangentes au cercle \mathcal{C} .

8 - Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les points $A(-3, 4)$ et $B(5, 0)$.

1. Démontrer que le cercle \mathcal{C} de centre O , de rayon 5 passe par A et B .

2. Calculer les coordonnées du point I milieu de (A, B) et déterminer l'équation de la médiatrice (OI) du bipoint (A, B) .

3. Démontrer que le point $M(5, 10)$ appartient à la droite (OI) et que les droites (MA) et (MB) sont tangentes au cercle \mathcal{C} .

9 - Le plan étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère les points :

$$A(1, 2); \quad B(3, 6); \quad C(5, 0).$$

1. Calculer AB, BC, CA ; montrer que le triangle (A, B, C) est rectangle et isocèle.

1. Déterminer les coordonnées de A', B', C' images respectives de A, B, C par f .
2. Déterminer les points dont A, B, C sont les images par f .
3. Montrer qu'une équation de (IJ) est : $y = -x + 1$.
4. Soit N le milieu de (M, M') . Montrer que les coordonnées de N sont :

$$\left(\frac{a-b+1}{2}; \frac{b-a+1}{2} \right)$$

et que N appartient à (IJ).

5. Montrer que $\overrightarrow{MM'} = (1-a-b) \cdot \vec{i} + (1-a-b) \cdot \vec{j}$ et que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à \overrightarrow{IJ} .
6. Dédurre des questions 4. et 5. que f est une isométrie de P .
Quel nom donne-t-on à cette isométrie?

(B.E.P.C. 1976, Rennes.)

13 - On considère dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) du plan les points :

$$A(-1, -2), \quad B(-4, -4), \quad C(1, 1), \quad D(0, -6).$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BC}$ à l'aide de \vec{u} et \vec{v} .
Montrer ainsi que les points B, O, C sont alignés.
2. Trouver les équations des droites (OA) et (DB). Montrer que ces droites sont perpendiculaires.
3. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection M .
4. Calculer les distances OB, AC, BM .
5. Calculer le rapport de projection orthogonale de l'axe associé à la demi-droite [OB] sur l'axe associé à la demi-droite [BD].

(B.E.P.C. 1975, Sénégal.)

14 - Soit un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel on donne trois points A, B, C de coordonnées :

$$A(2, 3), \quad B(4, 1), \quad C(8, 5).$$

1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$?
2. Montrer que le triangle (A, B, C) est rectangle en B .
3. Dans la symétrie de centre B , A a pour image D et C a pour image E .
Quelles sont les coordonnées du point D ? Du point E ?
4. Comparer les longueurs des quatre côtés du quadrilatère $ACDE$.

(B.E.P.C. 1974, Sénégal.)

15 - On illustrera par un dessin le problème suivant :

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne $A(1, 4), B(-1, 0), C(9, 0)$.

Soit I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de I par rapport à J .

1. Calculer les coordonnées de D et démontrer que (A, I, D, B) est un parallélogramme.
2. Quelle est la nature du triangle (A, C, B) ?
3. Préciser la nature du quadrilatère (A, I, D, B) .
4. Démontrer que A, I, D, B sont éléments d'un cercle C .
Quelles sont les coordonnées de son centre K ? Calculer son rayon.
5. Quelle est la position de la droite (CD) par rapport à C ?

(B.E.P.C. 1976, Sénégal.)