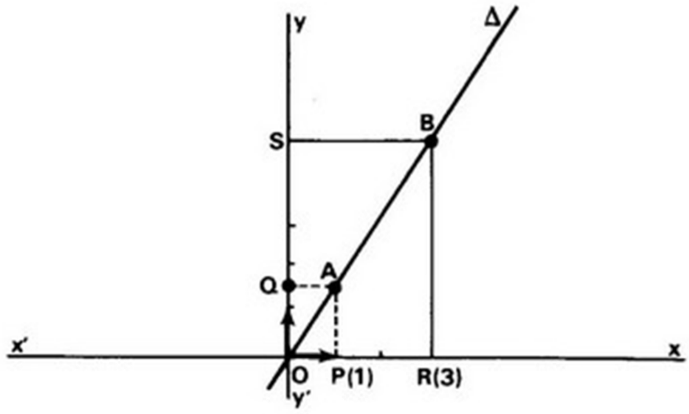
TRIGONOMETRIE

1 - On considère la fonction linéaire f dont on a tracé, ci-dessous la **représentation** graphique Δ par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. Un point A de Δ se projette orthogonalement en $P(1,0)$ sur la droite $(x'x)$ et en $Q(0, \sqrt{3})$ sur la droite $(y'y)$. Déterminer $f(1)$.
Un point B de Δ se projette orthogonalement en $R(3,0)$ sur la droite $(x'x)$ et en S sur la droite $(y'y)$. Trouver les coordonnées des points S et B.
Quel est l'image de l'intervalle $[1,3]$ par la fonction f?

2. Soit M un point quelconque de Δ, d'abscisse x. On désigne par d la distance OM.
Donner l'expression de d en fonction de x.
Représenter graphiquement, par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction g de R dans R définie par $g(x) = d$.

3. On appelle H la projection orthogonale de M sur la droite $(x'x)$.
Déterminer la tangente de l'angle géométrique $\widehat{MOH}$.

2 - Soit trois points A, B, M d'un axe de repère (O, I) tels que :

$$\overline{OA} = -2; \quad \overline{OB} = 4; \quad \overline{OM} = x \text{ et } M \in [AB].$$

Soit C un point du plan tel que (A, C, M) soit un triangle équilatéral et soit D et E deux points du plan tels que (M, B, E, D) soit un carré.,

1. Calculer AM et MB en fonction de x.

2. Calculer le périmètre y du triangle (A, M, C) et le périmètre z du carré (M, B, E, D) en fonction de x.

3. Représenter graphiquement par rapport à un repère orthonormé $(O', \vec{i}, \vec{j})$ les fonctions p et p' définies par :

$p : x \longmapsto p(x), \quad p(x) = y.$
$p' : x \longmapsto p'(x), \quad p'(x) = z.$

Déterminer x pour que le triangle (A, C, M) et le carré (M, B, E, D) aient le même périmètre. Vérifier le résultat sur la représentation graphique précédente.

4. Calculer x pour que la distance de C à la droite (AB) soit égale à EB.
Donner le résultat à 10^{-2} près par défaut.

3 - 1. Calculer deux nombres réels x et y sachant que :

$$\begin{cases} y - x = 7 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

2. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' et de rayon 2 et 5, sont tangents extérieurement en A.
Une droite D, tangente en H à $\mathcal{C}$ et en H' à $\mathcal{C}'$, coupe la droite (OO') en P. En exprimant sin $\widehat{OPH}$ de deux façons différentes trouver la valeur du quotient $\dfrac{PO}{PO'}$.
Calculer PO et PO'.

3. Calculer HH'.

4 - On donne deux droites parallèles (xx') et (yy') telles que A étant un point de (xx') et H sa projection orthogonale sur (yy'), les demi-droites $[Ax')$ et $[Hy')$ soient dans un même demi-plan de frontière (AH). On suppose que la distance AH est égale à 4.

1. Soit B le point de (yy') tel que AB soit égale à 5 et que H appartienne à la demi-droite $[By')$.
Calculer BH.

2. Les bissectrices de $([Ax'), [AB))$ et $([By'), [BA))$ se coupent en I.
Soit J la projection orthogonale de I sur la droite (AB), $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon IJ.
Démontrer que les droites (AB), (xx') et (yy') sont tangentes à $\mathcal{C}$.

3. Soit $\mathcal{C} \cap (xx') = \{K\}$ et $\mathcal{C} \cap (yy') = \{L\}$.
Démontrer que $AJ = AK = HL$ et que $BJ = BL$.
On pose $AJ = x$ et $BJ = y$. Exprimer BH et AB en fonction de x et y.
Calculer alors x et y.

5 - 1. Calculer deux nombres réels x et y sachant que :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

2. Un triangle (A, B, C) est tel que $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 3$.
La bissectrice de ([AB), [AC)) coupe la droite (BC) en D.
La demi-droite $[Cx)$ parallèle à (AD) et située dans le demi-plan de frontière (BC) contenant A coupe la droite (AB) en E.
Démontrer que $\widehat{AEC} = \widehat{BAD}$, $\widehat{ACE} = \widehat{DAC}$.
Puis que $\widehat{AEC} = \widehat{ECA}$.
En déduire la nature du triangle (E, C, A).

3. Démontrer que $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$.
Calculer les distances BD et DC. (On utilisera les résultats des calculs du 1°.)

6 - Dans un trapèze (A, B, C, D), tel que (AB) soit perpendiculaire à (BC) et (AD), $AB = 4$, $BC = 10$, $AD = 7$.
Soit H la projection ortogonale de D sur la droite (BC).

1. Calculer CH et CD.

2. Par un point M de la demi-droite [AB) on mène la parallèle Δ à (AD). Δ coupe (CD) en N.

a) On pose $AM = x$. Exprimer DN et MN en fonction de x.

b) Étudier les fonctions f et g définies dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$f : x \longmapsto f(x), \qquad f(x) = DN$$
$$g : x \longmapsto g(x), \qquad g(x) = MN.$$

c) Représenter graphiquement f et g par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

d) Déterminer le point M tel que $MN = DN$.

7 - On donne un triangle (A, B, C) rectangle en A, dans lequel $AB = 4$ et $AC = 3$.
On désigne par H la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

1. Calculer BC, $\cos \widehat{ABC}$, BH, CH et AH.

2. Soit M un point du segment [BC]. La perpendiculaire à la droite (BC) passant par M coupe la droite (AB) en P. La parallèle à la droite (BC) passant par P coupe la droite (AC) en Q. Q se projette orthogonalement en S sur la droite (BC).

Démontrer que (M, P, Q, S) est un rectangle.
On pose $BM = x$. Calculer BP et PQ en fonction de x.
a) Quand M appartient au segment [BH].
b) Quand M appartient au segment [HC].

Étudier quand M décrit le segment [BC] la fonction $p : x \longmapsto p(x)$, $p(x)$ étant égal au périmètre de (M, P, Q, S).

8 - 1. On donne un carré (A, B, C, D) tel que $AB = 5$.
Soit I un point de la droite (AC). I se projette orthogonalement en H et K sur les droites (BC) et (CD).
Démontrer que (I, K, C, H) est un carré.

2. On suppose que I appartient au segment [AC]. On pose $AI = x$. Calculer AC, puis exprimer IC et le périmètre de (I, K, C, H) en fonction de x
A quel intervalle J de $\mathbb{R}$ appartient x?
Étudier de J dans $\mathbb{R}$ la fonction $p_1, p_1 : x \longmapsto p_1(x)$.
$p_1(x)$ étant le périmètre de (I, K, C, H).

3. On suppose que I est un point quelconque de la droite (AC).
Soit $\vec{D}$ l'axe euclidien associé à la demi-droite [AC) on pose $\overline{AI} = x$.
Soit $p(x)$ le périmètre du carré (I, H, C, K).

Montrer que :

$$\text{si } x \leqslant 5\sqrt{2}, \quad p(x) = 20 - 2x\sqrt{2}$$
$$\text{si } x \geqslant 5\sqrt{2}, \quad p(x) = 2x\sqrt{2} - 20.$$

Représenter graphiquement la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $p : x \longmapsto p(x)$.

9 - 1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - 8y + 30 = 0 \end{cases}$$

2. On considère par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points A (6,2), B (2,4) et $M(x, y)$.

a) Calculer les coordonnées du milieu I de (A, B).

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et exprimer en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

Démontrer que M appartient à la médiatrice Δ de (A, B) si et seulement si $2x - y - 5 = 0$.

c) Calculer les coordonnées du point H intersection de Δ et de $(x'x)$ puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HB}$.

Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et de y.

d) Quelle relation doit exister entre les coordonnées x et y de M, pour que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{HB}$ soit orthogonaux?

e) Utiliser le résultat du 1. pour trouver les coordonnées du point M de Δ tel que $\overrightarrow{MB}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{HB}$.

10 - Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points :

$$A(0; 4); \quad B(0; 1); \quad D(2; 1).$$

1. *a*) Placer ces points.

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$.

c) Quelle est la nature du triangle (A, B, D)?

2. Soit un point M de coordonnées $\left(x; \dfrac{5}{2}\right)$, x étant un nombre réel.

a) Montrer que M est équidistant de A et de B, quel que soit x.

b) Trouver x pour que M soit équidistant de A et de D.

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle (A, B, D); quel est son centre? Quel est son rayon?

4. Soit E le point du plan tel que (A, D, E, B) soit un parallélogramme. Calculer ses coordonnées.

5. Soit a l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$. Déterminer tg a et sin a.

(B.E.P.C. 1976, *Strasbourg.*)

11 - Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ placer les points suivants :

$$A(-2; 7); \quad B(-5; -2); \quad C(7; -2) \text{ et } D(1; 4).$$

1. Exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

2. En déduire que :
a) Les points A, D, C sont alignés.
b) Le triangle (A, B, D) est rectangle, et en quel point?

3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle (A, B, D). Déterminer les coordonnées de son centre I et son rayon r.

4. Soit le point E tel que $\overrightarrow{OE} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$. Démontrer que le point E appartient à $\mathcal{C}$.

5. Soit H le point d'intersection des droites (BD) et (AE).
Soit F le point d'intersection des droites (AB) et (CH).
Démontrer que la droite (CF) est perpendiculaire à la droite (AB).

(B.E.P.C. 1976, *Nancy.*)

12 - Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a les points :

$$A(4; 3); \quad B(-4; 3); \quad C(-4; -3).$$

1. Quelles sont les coordonnées de M milieu de (A, B)?
Quelles sont les coordonnées de N milieu de (B, C)?
Que dire du point O pour (A, C)?

2. Montrer que (MN) est parallèle à (AC); que (ON) est parallèle à (AB); que (OM) est parallèle à (BC).

3. Quel est le symétrique de A dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OM)?
Quelle est l'image de A dans la symétrie centrale de centre O?

Quelle est l'image de B dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (ON)?
On justifiera les réponses à ces trois questions.

4. Montrer que A, B, C sont sur un même cercle de centre O. Quel est le rayon de ce cercle?

5. Exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MN}$. Quelle est l'isométrie qui donne :

O comme image de C
M comme image de N
A comme image de O

6. Quelle est la tangente de l'écart angulaire de $\widehat{MAO}$?

(B.E.P.C. 1976, *Rouen.*)

13 - Le plan euclidien considéré a pour unité de distance le centimètre. Soit (A, B, C, D) un carré de côté 10. On appelle E le point de [AB] tel que $AE = 2$ et F la projection orthogonale de E sur la diagonale [BD]. Soit (C) le cercle de diamètre [DF], O son centre et R son rayon.
Le cercle (C) coupe [AD] en G et [DC] en H.

1. Dessiner le carré et le cercle en vraie grandeur.

2. Quelle est la nature du triangle (E, F, B)?

3. Calculer BD, EB et BF et en déduire le rayon R.

4. Montrer que (G, F, H, D) est un carré et calculer son côté.

5. Calculer la distance de E au centre du cercle (C) et en déduire le cosinus de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{FEO}$.
Donner alors la valeur de cet écart angulaire à 1^0 près par défaut.

(B.E.P.C. 1976, *Aix-Marseille.*)